

# MATHEMATIK

November 2019

## Aufgabe 1: kreative Terme

128 =  $2^{8-1}$

99999999 =  $(9 + 9 : 9)^{9-9:9} - 9 : 9$

1024 =  $(4 - 2)^{10}$

1260 =  $21 \cdot 60$

153 =  $3 \cdot 51$

343 =  $(3 + 4)^3$

347 =  $7^3 + 4$

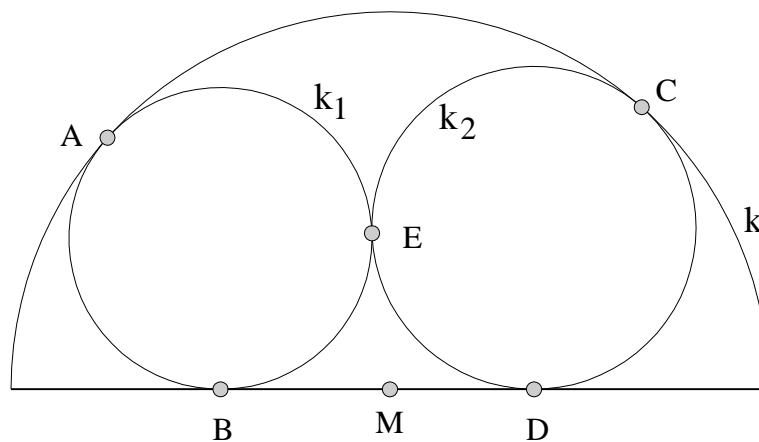
987654321 =  $(8 \cdot (97 + 6 : 2)^5 + 1) : 3^4$

123456789 =  $((86 + 2 \cdot 7)^5 - 91) : 3^4$

Zwischen jedem Rechenausdruck in der Abbildung und seinem Ergebnis besteht jeweils der gleiche Zusammenhang.

- Beschreibe diesen Zusammenhang und formuliere ihn als Regel, die von allen Zahlen in der Abbildung erfüllt wird.
- Zeige, dass die Zahlen 25, 121, 125, 126 und 625 diese Regel ebenfalls erfüllen und gib geeignete Terme (Rechenausdrücke) an. Finde weitere Zahlen mit dieser Eigenschaft.
- Es gibt aufeinanderfolgende Zahlen wie 2500, 2501, 2502, 2503, ... oder 15620, 15621, 15622, 15623, ... , die die Regel erfüllen, aber jeweils nur endlich viele. Gib geeignete Terme sowie die letzte Zahl der Folge an.
- Untersuche, wie viele Zahlen der Bauform 2500...00, 2500...01, ... die Regeln erfüllen. Zeige, dass demzufolge unendlich viele derartige Zahlen existieren.
- $3^9 = 19683$ . Zeige: Alle Glieder der Zahlenfolge  $n \cdot 10^{14} + 19683$  mit  $n \in \mathbb{N}$  erfüllen die in a) aufgestellten Regeln.

**Aufgabe 2: Kreise im Halbkreis (2)**



Der Kreis  $k_1$  berührt die Kreislinie des Halbkreises  $k$  im Punkt  $A$  sowie den Durchmesser von  $k$  im Punkt  $B$ . Die Punkte  $A$  und  $B$  sowie der Kreis  $k_1$  sind vorgegeben (siehe MA-THEMA September 2019). Der Kreis  $k_2$  soll die Kreislinie des Halbkreises  $k$  im Punkt  $C$  berühren, den Kreis  $k_1$  im Punkt  $E$  sowie den Durchmesser von  $k$  im Punkt  $D$ .

- a) Spezialfall:  $A$  und  $B$  wurden so gewählt, dass  $k_1$  und  $k_2$  exakt gleich große Durchmesser haben. Gib eine Konstruktion für  $k_2$  an und begründe sie.
- b) Im Folgenden können  $k_1$  und  $k_2$  verschieden große Durchmesser haben – so wie in der Abbildung. Der Punkt  $C$  ist vorgegeben. Gib eine Konstruktion für  $k_2$  an und begründe sie.
- c) Der Punkt  $D$  ist vorgegeben. Gib eine Konstruktion für  $k_2$  an und begründe sie.
- d) Der Punkt  $E$  ist vorgegeben. Gib eine Konstruktion für  $k_2$  an und begründe sie.
- e) Die Lage der Punkte  $C$ ,  $D$  und  $E$  ist unbekannt, aber durch die Lage von  $k$  und  $k_1$  eindeutig bestimmt. Gib eine Konstruktion für  $k_2$  an.

**Aufgabe 3: Fortsetzbare Folgen von Gleichungen (5)**

$$1 = 1^4 = 1 \cdot 1$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = \square^4 = 2 \cdot \square$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = \square^4 = 4,5 \cdot \square$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 27 + 29 + 31 = \square^4 = 8 \cdot \square$$

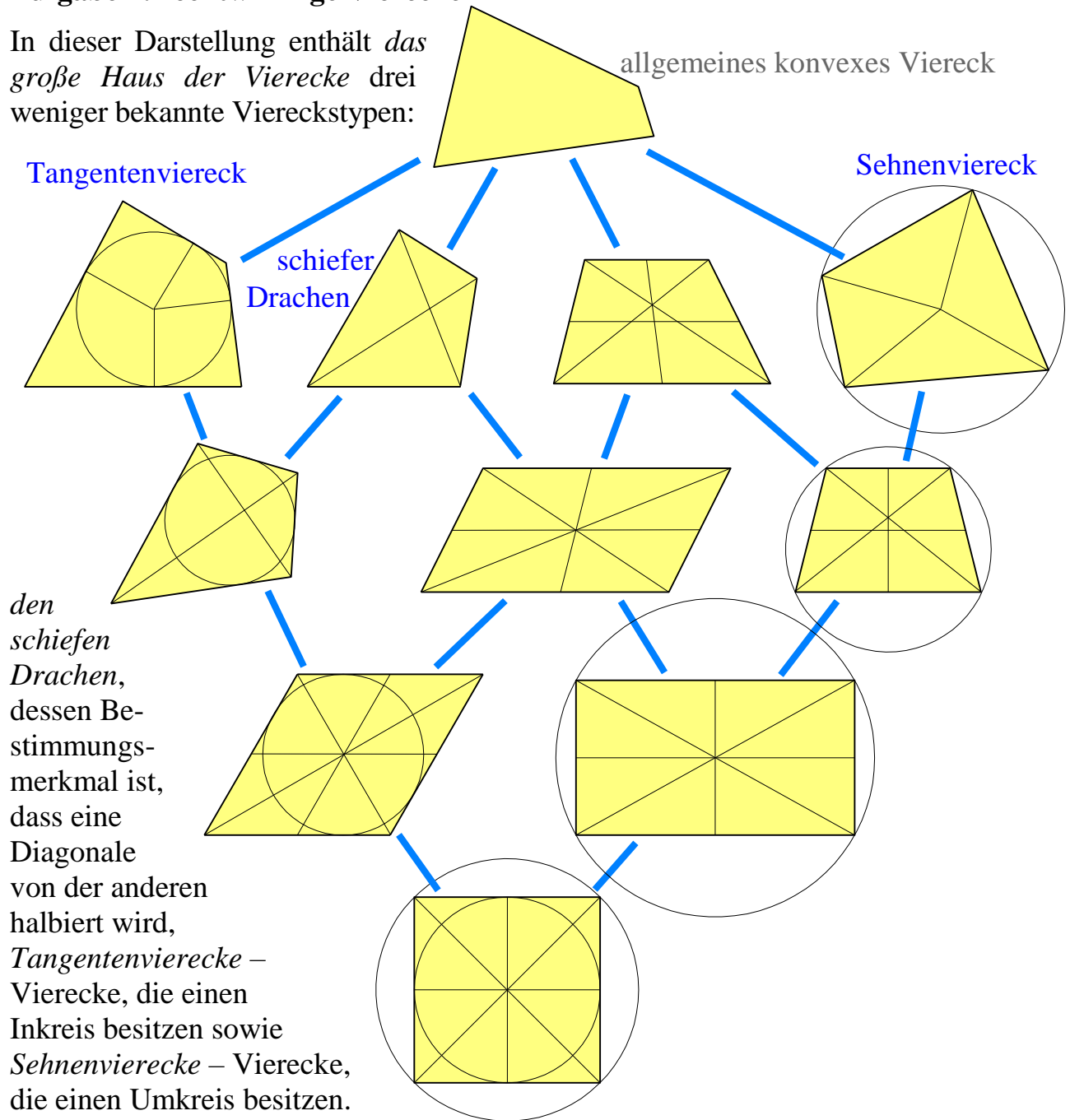
$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$

**Tipp:** Verwende ab hier eine Tabellenkalkulation

- a) Bestimme die sechs fehlenden Werte.
- b) Gib die nächsten drei Gleichungen an und überprüfe sie.  
Gib die 20. Gleichung sowie die 21. Gleichung an und überprüfe sie.
- c) Gib einen allgemeinen Ausdruck für die Terme links, in der Mitte und rechts an. Definiere, welche Bedeutung die dabei von dir verwendete Variable hat. Beweise, dass die drei Terme gleichwertig sind.

**Aufgabe 4: rechtwinklige Vierecke**

In dieser Darstellung enthält *das große Haus der Vierecke* drei weniger bekannte Viereckstypen:



- a) Erläutere an Beispielen die Beziehungen der Viereckstypen in dieser Darstellung.
- b) Ein Viereck, das mindestens einen rechten Winkel besitzt, heißt *rechtwinkliges Viereck*. Untersuche, welche Viereckstypen aus diesem Haus der Vierecke rechtwinklige Vierecke sind und welche Viereckstypen rechtwinklige Vierecke sein können ohne ihren Platz im Haus der Vierecke zu ändern. Bestimme die dabei möglichen bzw. notwendigen Anzahlen von rechten Winkeln.
- c) Die Seiten- und Diagonalenlängen eines Vierecks werden üblicherweise mit  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  und  $f$  bezeichnet. Interpretiere Gleichungen wie  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ ,  $b^2 + c^2 = f^2$  oder  $\sqrt{e^2 - b^2} + c = \sqrt{e^2 - a^2} + d$ , ordne sie den rechtwinkligen Vierecken zu und stelle ggf. weitere Gleichungen auf.