MA-THEMA

Februar 2024

Aufgabe 1: Al di ganzen Jahre waren wir nie ohne Anjosch-Kalender

„*Gab's beim Discounter Anjosch-Kalender für 2024? Für 2023 hatten sie ja keine!*“ „*Wie gut, dass ich den von 2017 wegen der Bilder aufbewahrt hatte; der passte doch als Notlösung für 2023. Heute hab‘ ich sogar drei Stück ergattert. Dazu die Anmerkung der Kassiererin: Es gab sehr wohl Anjosch-Kalender für 2023 im Angebot. Vermutlich hätten wir letztes Jahr nur zu spät gesucht.*“

„*Ich hatte mich schon gefragt, welchen alten Kalender wir denn für 2024 nehmen müssten, falls wir keinen neuen bekommen – vielleicht den von 2018*?“ „*Geht das überhaupt? 2024 ist ein Schaltjahr, aber 2018 war ein Normaljahr.*“

a) Ermittle, welche älteren Kalender auch für das Jahr 2024 passen.

b) Untersuche, für welche Jahre man welchen älteren Kalender verwenden könnte. Formuliere eine Regel und begründe sie.

c) Informiere dich über den Gregorianschen sowie den Julianischen Kalender. Stelle Informationen zusammen, die für Aufgabe **b**) relevant sein könnten.

Aufgabe 2: Summe und Differenz von Primzahlen

Nimm zwei beliebige Primzahlen größer als 3.

Satz: Entweder ist die Summe oder die Differenz zweier Primzahlen, die größer als 3 sind, durch 3 teilbar.

a) Mache dir diesen Satz an Beispielen klar.

b) Begründe: Die Summe oder die Differenz solcher Primzahlen ist sogar durch 6 teilbar. Prüfe, ob das „*oder*“ auch hier ein „*entweder – oder*“ ist. Untersuche, ob dieser Satz auch für beliebige ungerade Zahlen gilt.

c) Berechne zuerst die Quadrate zweier beliebiger Primzahlen größer als 3 und dann die positive Differenz dieser Quadratzahlen. Formuliere eine Vermutung und versuche, sie zu begründen.

Tipp: Du kannst für die Untersuchungen auch eine Tabellenkalkulation nutzen.

TKS Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster Hilfe

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		5	7	11	13	17	19	23
2	5	=REST(ABS($A2-B$1);3)						
3	7							
4	11	0	1	0	2	0	2	0
5	13							
6	17							
7	19							
8	23							
9	29							
10	31							
11	37							
12	41							
13	43							

Die Abbildung zeigt eine Matrix mit den Primzahlen in Zeile 1 und in Spalte A.

= \$A2 + B\$1 berechnet die Summe der beiden Primzahlen in Zelle A2 und B1.

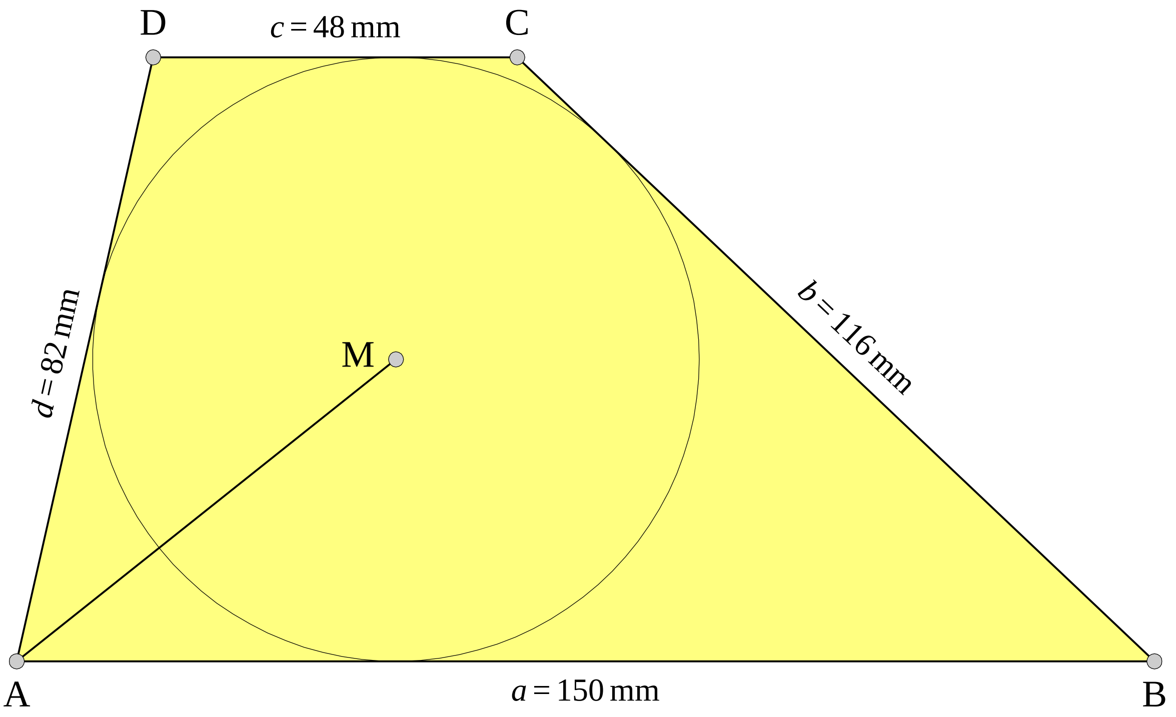
= ABS (\$A2 – B\$1) berechnet den Betrag der Differenz der beiden Primzahlen.

= REST(\$A2 + B\$1; 3) berechnet den Rest der Summe bei Division durch 3.

Trage eine dieser Tabellenkalkulations-Formeln in Zelle B2 in die linke obere Ecke der Matrix ein. Durch Anklicken Zelle B2 markieren, Maustaste loslassen. Mit dem Mauszeiger auf die untere rechte Ecke der markierten Zelle gehen. Dort befindet sich jetzt ein kleines schwarzes Quadrat, die Ziehmarke. Über der Ziehmarke verwandelt sich der Mauszeiger von einem großen, weiß gefüllten Kreuz zu einem kleinen Pluszeichen. Die Ziehmarke mit der linken Maustaste anklicken, Taste gedrückt halten, jetzt nach rechts ziehen. Damit ist die ganze Zeile 2 ausgefüllt.

Den Bereich B2 : H2 markiert lassen. Um die Abbildung übersichtlich zu halten, zeigt das Beispiel einen anderen markierten Bereich, nämlich B4 : H4. Die Ziehmarke in der unteren rechten Ecke des markierten Bereichs anklicken, Maustaste halten und nach unten ziehen. Damit ist die ganze Matrix ausgefüllt.

Aufgabe 3: besondere Winkel im Trapez



Das Viereck ABCD ist es besonderes Trapez: Es besitzt einen Inkreis.

a) Informiere dich über Tangentenvierecke und weise rechnerisch nach, dass das vorliegende Trapez tatsächlich einen Inkreis besitzt.

b) Vier Strecken führen von den Eckpunkten A, B, C und D zum Inkreismittelpunkt M. Die Strecke $\overline{AM}$ ist bereits eingezeichnet.

- Ergänze die drei fehlenden Strecken und gib ihre Bedeutung für das Viereck an.
- Bestimme die Größen der vier Winkel ∢AMB, ∢BMC, ∢CMD und ∢DMA zwischen diesen Strecken, die sich im Punkt M treffen.
- Untersuche diese Winkel auf besondere Maße sowie auf besondere Zusammenhänge zwischen je zwei Winkelmaßen. Begründe diese Besonderheiten durch geometrische Überlegungen. Gib allgemeine Terme für die Winkelmaße an.

c) Zeichne die Diagonalen ein. Vergleiche die Lage Inkreismittelpunktes mit der Lage des Diagonalenschnittpunktes. Begründe deine Vermutung.

d) Das Viereck ABCD wird verändert, z. B.

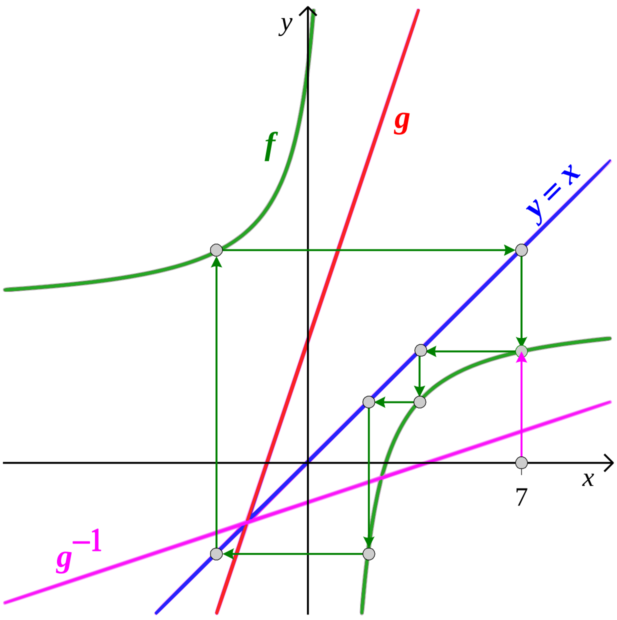
- zu einem Trapez ohne Inkreis,
- zu einem Tangentenviereck ohne parallele Seiten,
- zu einem symmetrischen Drachenviereck,
- so, dass alle vier Winkel ∢AMB, ∢BMC, ∢CMD und ∢DMA gleich groß sind.

Wähle ein paar dieser Veränderungen aus und untersuche, wie sie sich auf die Ergebnisse von **b**) und **c)** auswirken. Begründe deine Ergebnisse.

Aufgabe 4: arithmetische Schleifen (3)

Denke dir eine natürliche Zahl größer als 5. Vermindere diese Zahl um 1. Diese Differenz soll als Nenner dienen. Subtrahiere nun vom Fünffachen der gedachten Zahl die Zahl 13. Das Ergebnis dient als Zähler. Dividiere nun den Zähler durch den Nenner. Nimm den Wert des so erhaltenen Quotienten anstelle der gedachten Zahl und wiederhole damit die gleichen Rechenschritte. Wiederhole diesen Rechenvorgang mehrmals.

Dies kann als wiederholtes Einsetzen der erhaltenen Funktionswerte in die Funktion f mit $f(x)=\frac{5\cdot x-13}{x-1}$ interpretiert werden. Ein Beispiel mit 7 als Startwert, siehe Abbildung: $f(7)=\frac{11}{3}$; $f\left(\frac{11}{3}\right)=2$; $f(2)=-3$; $f(-3)=7$. Der vierte Wert ist gleich dem Startwert. Man sagt dazu: Diese Funktion f erzeugt eine Schleife der Länge 4 (siehe MA-THEMA 09/23 und 11/23).



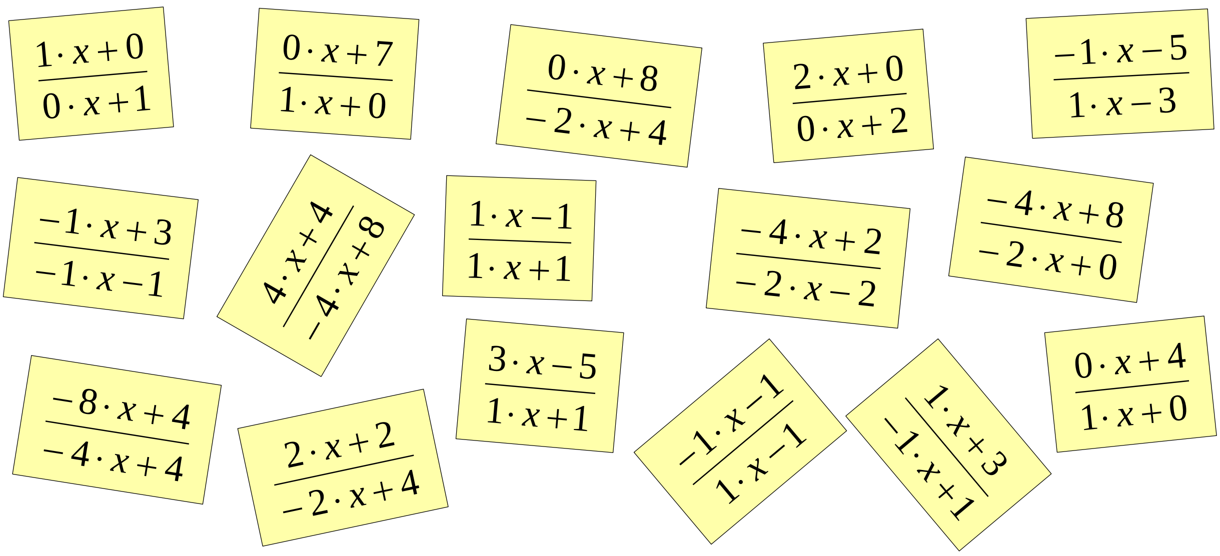
a) Probiere für die Funktion f weitere Startwerte aus und weise nach, dass die Schleife stets die Länge 4 hat. Untersuche, welche Zahlen als Startwerte ausgeschlossen werden müssen.

b) Zu der Funktion g mit $g(x)=3\cdot x+4$ ist g^{-1} mit $g^{-1}(x)=\frac{1}{3}\cdot x-\frac{4}{3}$ die Umkehrfunktion. Der Zusammenhang ist

$$g^{-1}(g(x))=\frac{1}{3}\cdot(3\cdot x+4)-\frac{4}{3}=x.$$

Spiegelt man einen Graphen an der blauen Winkelhalbierenden, dann ist das Spiegelbild der Graph der Umkehrfunktion.
Bestimme die Umkehrfunktion zu f.

c) Die Abbildung zeigt Terme von Funktionen, die Schleifen erzeugen, sowie die Terme der zugehörigen Umkehrfunktionen. Bestimme jeweils die Länge der Schleife. Ordne jeder Funktion die passende Umkehrfunktion zu.



Exkurs: Vorschlag für ein Projekt

Bei der Entwicklung der Aufgabenserie „arithmetische Schleifen“ ist die MA-THEMA-Redaktion auf eine Reihe weiterer Fragen gestoßen, die zu umfangreich für eine MA-THEMA-Aufgabe sind. Als Vertiefung der drei vorliegenden Aufgaben scheinen diese Fragestellungen aber lohnend für weitere Untersuchungen zu sein, zum Beispiel im Rahmen einer mathematischen Facharbeit („besondere Lernleistung“) oder im Rahmen eines Wettbewerbes wie „Jugend forscht“.

- Wie wirkt es sich aus, wenn der Graph einer Schleifen bildenden Funktion die Winkelhalbierende schneidet? Liegen die Punkte der Schleife immer beidseits der Definitionslücke?
- Gegeben ist die Funktion $f(x)=\dfrac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Für die zugehörige Umkehrfunktion f^{-1} gilt $f^{-1}(f(x))=x$. Bestimme den Term von f^{-1} in allgemeiner Form.
- Angenommen, eine Funktion f besitze die Schleifenlänge 3. Dann gilt $f(f(f(x)))=x$. Begründe: Daraus folgt $f(f(x))=f^{-1}(x)$.
- Stelle Bestimmungsgleichungen für die Parameter a, b, c, d einer Schleifen bildenden Funktion auf. Beispielsweise gilt für eine Funktion mit der Schleifenlänge 3 die Bedingung $f(f(f(x)))=x$. Ausführlicher geschrieben ist

  $$f(f(f(x)))=\frac{a\cdot f(f(x))+b}{c\cdot f(f(x))+d}=\frac{a\cdot\frac{a\cdot f(x)+b}{c\cdot f(x)+d}+b}{c\cdot\frac{a\cdot f(x)+b}{c\cdot f(x)+d}+d}=\frac{a\cdot\frac{a\cdot\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}+b}{c\cdot\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}+d}+b}{c\cdot\frac{a\cdot\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}+b}{c\cdot\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}+d}+d}=$$

  $\dfrac{(a^3+2\cdot a\cdot b\cdot c+b\cdot c\cdot d)\cdot x+b\cdot(a^2+a\cdot d+b\cdot c+d^2)}{c\cdot(a^2+a\cdot d+b\cdot c+d^2)\cdot x+(a\cdot b\cdot c+2\cdot b\cdot c\cdot d+d^3)}=x$ (*diese Berechnung wurde mit einem CAS ausgeführt*). Begründe: Damit die Gleichung erfüllt ist, muss gelten $(a^3+2\cdot a\cdot b\cdot c+b\cdot c\cdot d)=(a\cdot b\cdot c+2\cdot b\cdot c\cdot d+d^3)$ und $b\cdot(a^2+a\cdot d+b\cdot c+d^2)=0$ sowie $c\cdot(a^2+a\cdot d+b\cdot c+d^2)=0$.

  Suche mit einem Computerprogramm oder mit einer Tabellenkalkulation ganzzahlige Werte von *a*, *b*, *c* und *d*, mit denen diese Gleichungen erfüllt sind.
- Suche entsprechend ganzzahlige Werte *a*, *b*, *c* und *d* für Funktionen $f(x)=\dfrac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$ mit den Schleifenlängen 4, 5, 6, 7, 8 ... oder weise nach, dass solche Funktionen mit ganzzahligen Werte *a*, *b*, *c* und *d* nicht existieren. Bilden andere Funktionstypen ebenfalls Schleifen?
- Weise nach, dass die Verkettung einer Schleifen bildenden Funktion mit sich selbst eine Gruppe bildet. Beispielsweise erzeugt die Funktion $f(x)=\dfrac{3\cdot x-3}{1\cdot x+0}$ mit der Verknüpfung „Verkettung“ (Hintereinanderausführen) eine Gruppe mit den sechs Elementen $f(x)$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$, $f(f(f(f(x))))$, $f(f(f(f(f(x)))))$ und $f(f(f(f(f(f(x))))))$. Gib deren Funktionsterme mit konkreten Zahlen an. Stelle eine Verküpfungstabelle auf und weise nach, dass die Axiome einer Gruppe erfüllt sind. Untersuche andere Gruppen, die von Funktionen mit anderen Schleifenlängen erzeugt werden.
- Beweise: Wenn eine Funktion für einen bestimmten Startwert die Schleifenlänge 4 (bzw. *n*) besitzt, dann besitzt sie auch für alle anderen Startwerte (soweit diese nicht ausgeschlossen sind, weil sie auf die Definitionslücke führen) die gleiche Schleifenlänge 4 (bzw. *n*).